Droites et plans dans l'espace. Equations. Positions relatives; plans contenant une droite donnée.

Pré-requis:

◇ La connaissance de la structure d'espace affine de l'espace (Calcul de vecteurs et relation de Chasles).
Soit $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$, une structure d'espace affine de direction $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ sur un ensemble $\mathcal{E}$ est la donnée pour tout couple $(A, B) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}$ d'un vecteur associé noté $\overrightarrow{AB}$ de sorte que:

- $$\forall (A, B, C) \in \mathcal{E}^3, \qquad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \qquad \text{(Relation de Chasles)}.$$
- $$\forall M \in \mathcal{E}, \forall \overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{E}}, \exists! N \in \mathcal{E}, \overrightarrow{u} = \overrightarrow{MN}$$
  $$\text{(Notation de Grassmann: } N = M + \overrightarrow{u}.\text{)}$$

On dit alors que N est le translaté de M par $\overrightarrow{u}$.

◇ Définition de bases et de dimension d'un espace vectoriel et de la somme de deux espaces vectoriels $\left(\dim\left(\overrightarrow{\mathcal{F}} + \overrightarrow{\mathcal{G}}\right) = \dim\left(\overrightarrow{\mathcal{F}}\right) + \dim\left(\overrightarrow{\mathcal{G}}\right) - \dim\left(\overrightarrow{\mathcal{F}} \cap \overrightarrow{\mathcal{G}}\right)\right)$.

Cadre: On se place dans un espace affine $\mathcal{E}$ de dimension 3 et on note $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ son espace vectoriel associé.

0.1 Droites et plans dans l'espace.

Définition 0.1.1.
Soient $A \in \mathcal{E}$ et $\overrightarrow{\mathcal{F}}$ un sous-espace vectoriel de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$.
Le sous-espace affine (ou variété affine) $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$ passant par A et de sous-espace directeur (ou direction) $\overrightarrow{\mathcal{F}}$ est l'ensemble des translatés de A par les vecteurs de $\overrightarrow{\mathcal{F}}$.
Avec la notation de Grassmann, cela s'écrit $\mathcal{F} = A + \overrightarrow{\mathcal{F}}$.

Vocabulaire: La dimension d'une variété affine est celle de son espace vectoriel associé.

Définition 0.1.2.
Un sous-espace affine de dimension 1 (respectivement 2) de $\mathcal{E}$ est une droite (respectivement un plan) de $\mathcal{E}$.

Notation: Une droite $\mathcal{D}$ passant par A est de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ sera notée systématiquement $\mathcal{D}(A, \overrightarrow{u})$ et un plan $\mathcal{P}$ passant par A et de vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sera noté $\mathcal{P}(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Propriétés 0.1.3.
Soient $\mathcal{D}(A, \overrightarrow{u})$ et $\mathcal{P}(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. On a:

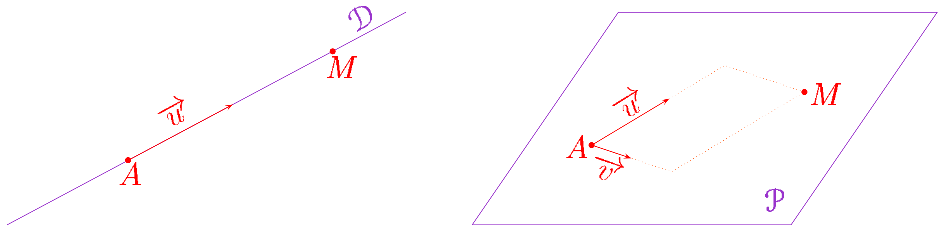
$$M \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \exists ! \lambda \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{u}.$$

et

$$M \in \mathcal{P} \Leftrightarrow \exists !(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{u} + \mu \overrightarrow{v}.$$

On dit alors, que $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{u} + \mu \overrightarrow{v}$ sont les équations vectorielles paramétriques respectives de la droite $\mathcal{D}$ et du plan $\mathcal{P}$.

Démonstration. Ceci découle directement de la définition d'un sous-espace affine et de la structure d'espace affine. ∎



0.2 Positions relatives.

Définition 0.2.1.
Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous-espaces affines.
On dit que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont:
- confondus lorsque $\mathcal{F} = \mathcal{G}$.
- sécants lorsque $\mathcal{F} \neq \mathcal{G}$ et $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$.
- coplanaire lorsque $\overrightarrow{\mathcal{F}} + \overrightarrow{\mathcal{G}}$ est un plan vectoriel.
- $\mathcal{F}$ est parallèle à $\mathcal{G}$ lorsque $\overrightarrow{\mathcal{F}} \subset \overrightarrow{\mathcal{G}}$.

Théorème 0.2.2.
Soient $\overrightarrow{\mathcal{F}}$ et $\overrightarrow{\mathcal{G}}$ deux sous-espaces vectoriels de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ et $(A, B) \in \mathcal{E}^2$.
Les variétés affines $\mathcal{F} = A + \overrightarrow{\mathcal{F}}$ et $\mathcal{G} = B + \overrightarrow{\mathcal{G}}$ ont un point commun C si, et seulement si $\overrightarrow{AB} \in \overrightarrow{\mathcal{F}} + \overrightarrow{\mathcal{G}}$.

Démonstration. Il existe $C \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G}$, si, et seulement si il existe $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in \overrightarrow{\mathcal{F}} \times \overrightarrow{\mathcal{G}}$ tel que $C = A + \overrightarrow{u} = B + \overrightarrow{v}$, ce qui est équivalent à $B = A + \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$ qui est un vecteur de $\overrightarrow{\mathcal{F}} + \overrightarrow{\mathcal{G}}$. ∎

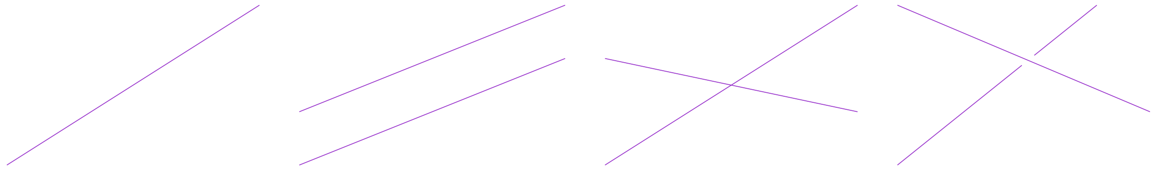
Remarque: Lorsque $\overrightarrow{\mathcal{F}} \oplus \overrightarrow{\mathcal{G}} = \overrightarrow{\mathcal{E}}$, un tel point C est unique, car $\overrightarrow{AB}$ se décompose de manière unique: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$.

Il découle directement de ce théorème:

Corollaire 0.2.3.

Soient $\mathcal{D}(A, \overrightarrow{u})$, $\mathcal{D}'\left(A', \overrightarrow{u'}\right)$, $\mathcal{P}(B, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$ et $\mathcal{P}'\left(B', \overrightarrow{v_1'}, \overrightarrow{v_2'}\right)$.

- $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont:
  - confondues si, et seulement si $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont tous colinéaires.
  - parallèle disjointes si, et seulement si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont liés et $\overrightarrow{AB}$ ne leur est pas colinéaires.
  - sécantes si, et seulement si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont libres et $\overrightarrow{AB} \in \mathrm{vect}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ (sous-espace vectoriel engendré par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$).
  - non coplanaires si, et seulement si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont libres et $\overrightarrow{AB} \notin \mathrm{vect}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.



- $\mathcal{D}$ est:
  - contenue dans $\mathcal{P}$ si, et seulement si $\overrightarrow{\mathcal{D}} \subset \overrightarrow{\mathcal{P}}$ et $\overrightarrow{AB} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$.
  - disjointe et parallèle à $\mathcal{P}$ si, et seulement si $\overrightarrow{\mathcal{D}} \subset \overrightarrow{\mathcal{P}}$ et $\overrightarrow{AB} \notin \overrightarrow{\mathcal{P}}$.
  - sécante à $\mathcal{P}$ si, et seulement si $\overrightarrow{\mathcal{D}} \not\subset \overrightarrow{\mathcal{P}}$.

- $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont:
  - confondus si, et seulement si $\overrightarrow{\mathcal{P}} = \overrightarrow{\mathcal{P}'}$ et $\overrightarrow{AB} \in \overrightarrow{\mathcal{P}}$.
  - parallèles si, et seulement si $\overrightarrow{\mathcal{P}} = \overrightarrow{\mathcal{P}'}$ et $\overrightarrow{AB} \notin \overrightarrow{\mathcal{P}}$.
  - sécants si, et seulement si $\overrightarrow{\mathcal{P}} \neq \overrightarrow{\mathcal{P}'}$.