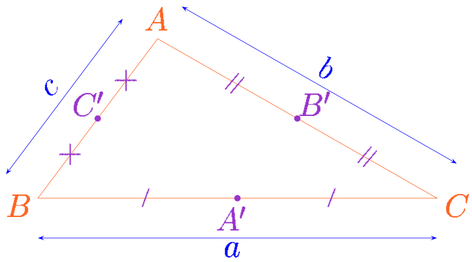
Droites remarquables du triangle: médiatrices, hauteurs, bissectrices, médianes...

Pré-requis:
- ◇ Définitions et propriétés de la médiatrice d'un segment, de la bissectrice de deux demi-droites (et les bissectrices de deux droites).
- ◇ La notion de barycentre.
- ◇ Caractérisation angulaire de la cocyclicité de quatres points.

Cadre: On se place dans un plan affine euclidien orienté $\mathcal{P}$.

Notations:
- Dans tout l'exposé, ABC désigne un triangle non plat, A', B', C' sont les milieux respectifs de $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$ et $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$.

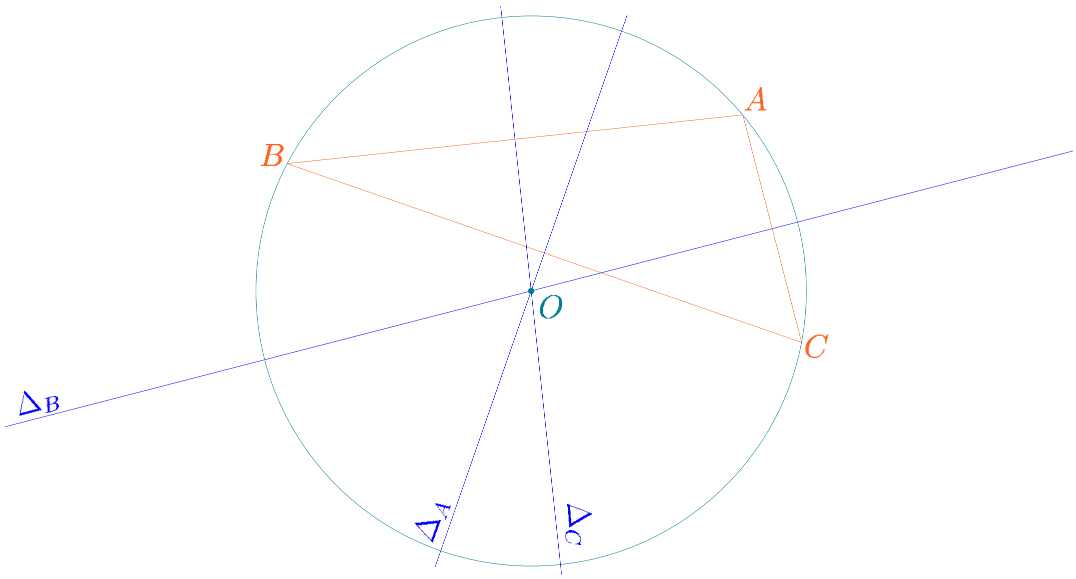


- On notera $\mathrm{Bar}((A_1, a_1), (A_2, a_2), \ldots, (A_n, a_n))$ le barycentre de A_1, A_2, $\ldots$, A_n pondérés par a_1, a_2, $\ldots$, a_n.

0.1 Les médiatrices de ABC.

Définition 0.1.1.
Les médiatrices d'un triangle sont les médiatrices de ses côtés.

Théorème 0.1.2.
Les trois médiatrices d'un triangle ABC se coupent en un point O centre du cercle passant par A, B, C et appelé cercle *circonscrit* au triangle ABC.



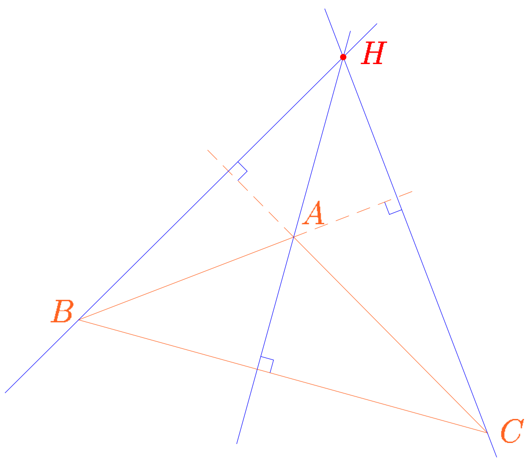
Démonstration. Notons Δ_A (respectivement Δ_B, Δ_C) la médiatrice du segment $[BC]$ (respectivement $[CA]$, $[AB]$).

Supposons que Δ_A et Δ_B sont parallèles, alors (BC) est parallèle à (CA) ce qui implique que A, B, C sont alignés, ce qui contredit notre hypothèse. Par conséquent, Δ_A et Δ_B sont sécantes en un point O. Puisque $O\Delta_A$ on a $OB = OC$ et $O \in \Delta_B$ implique $OC = OA$. Donc $OB = OA$ et par suite $O \in \Delta_C$. ■

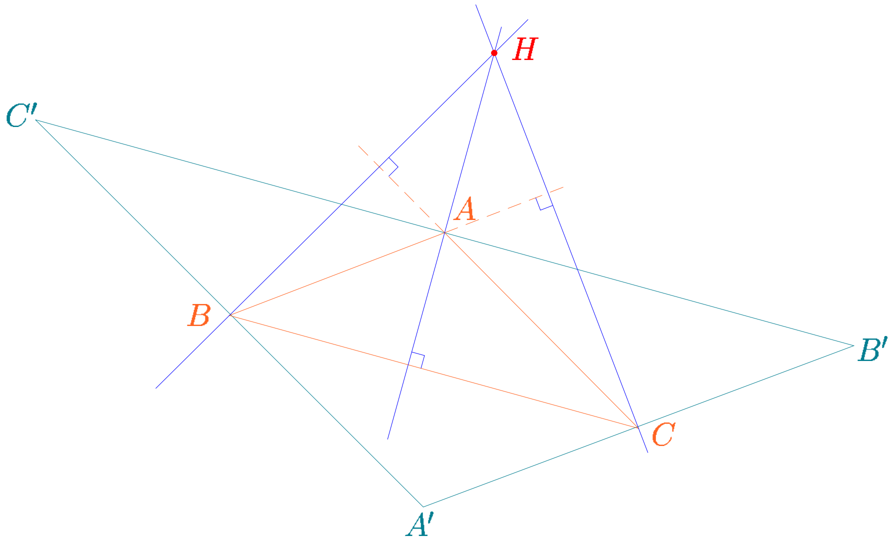
0.2 Les hauteurs de ABC.

Définition 0.2.1.
La hauteur issue de A (respectivement B, C) du triangle ABC est la droite passant par A (respectivement B, C) et perpendiculaire au côté opposé.

Théorème 0.2.2.
Les trois hauteurs d'un triangle ABC sont concourantes en un point H appelé *orthocentre* du triangle.



Démonstration. Commençons par compléter le dessin:



Soit $A'B'C'$ le triangle dont les côtés $[B'C']$, $[C'A']$, $[A'B']$ sont respectivement parallèles à $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$ et passant par A, B, C. (Un tel triangle existe car si $(A'B)$ et $(B'A)$ étaient parallèles (AC) et (BC) le seraient aussi et si $A' = B'$ alors $(C'B')$ et $(C'A')$ seraient confondues et par conséquent (BC) et (AC) seraient parallèles).

Les quadrilatères $ABCB'$, $ACBC'$ et $ABA'C$ sont des parallèlogrammes, ainsi $BC = C'A = AB'$ d'où A est le milieu de $[B'C']$. De la même façon, on a B milieu de $[C'A']$ et C milieu de $[A'B']$.

La hauteur issue de A de ABC est perpendiculaire à $(B'C')$ car, par définition, elle est perpendiculaire à (BC) qui est parallèle à à $(B'C')$. De même, la hauteur issue de B est perpendiculaire à $(A'C')$ et celle issue de C est perpendiculaire à $(A'B')$. Donc les hauteurs de ABC sont les médiatrices de $A'B'C'$ et le théorème précédent permet de conclure. ■

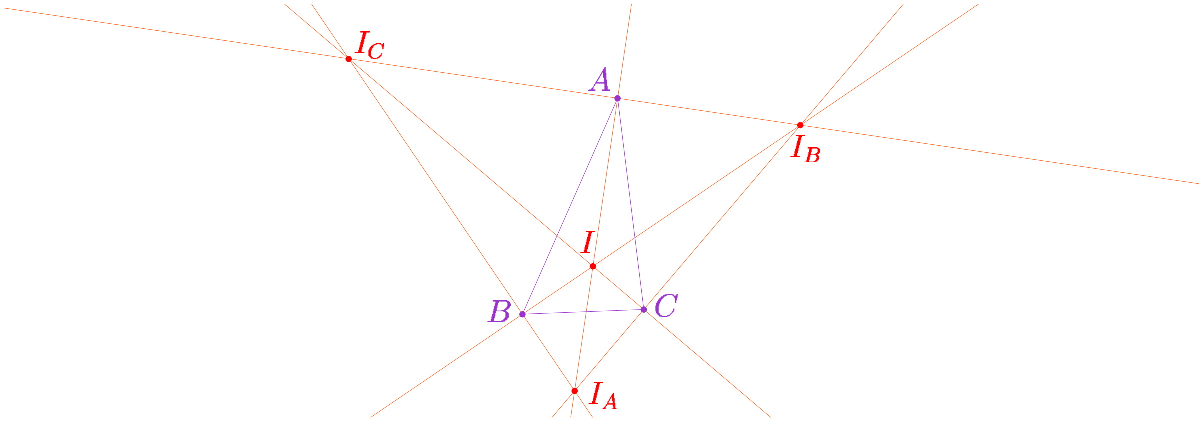
Exercice: Montrer que le symétrique de l'orthocentre H d'un triangle non plat ABC par rapport à un côté du triangle se trouve sur le cercle circonscrit.

Démonstration. Si H' est le symétrique de H par rapport à (BC). Une réflexion inversant les angles orientés, on a $\left(\overrightarrow{H'B}, \overrightarrow{H'C}\right) = -\left(\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HC}\right) = \left(\overrightarrow{HC}, \overrightarrow{HB}\right)$ $[2\pi]$, or $\left(\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HC}\right) = \left(\overrightarrow{HC'}, \overrightarrow{HB'}\right)$ $[2\pi]$. Les triangles $HC'A$ et $HB'A$ sont rectangles et de même hypoténuse, donc H, C', A, B' sont cocycliques et on a $\left(\overrightarrow{HC'}, \overrightarrow{HB'}\right) = \left(\overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{AB'}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ $[\pi]$. On en déduit $\left(\overrightarrow{H'B}, \overrightarrow{H'C}\right) = \left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right)$ $[\pi]$ ce qui signifie que A, B, C et H sont cocyclique. ■

0.3 Les bissectrices de ABC.

Définition 0.3.1.
Dans le triangle ABC, les trois bissetrices des trois demi-droites $[AB)$ et $[AC)$, $[BC)$ et $[BA)$, $[CA)$ et $[CB)$ sont appelées les bissectrices intérieures du triangle ABC. Les trois bissectrices de (AB) et (AC), (BC) et (BA), (CA) et (CB) distinctes des bissectrices intérieures sont appelées les bissectrices extérieures du triangle ABC.

✎ **Théorème 0.3.2.**
Les trois bissectrices intérieures de ABC sont concourantes en le barycentre I de (A,a), (B,b) et (C,c). La bissectrice intérieure issue de A (respectivement de B; respectivement de C) est concourante avec les deux bissectrices extérieures issues de B et C (respectivement de C et A; respectivement de A et B) en le barycentre I_A de $(A,-a)$, (B,b) et (C,c) (respectivement I_B de (A,a), $(B,-b)$ et (C,c); respectivement I_c de (A,a), (B,b) et $(C,-c)$).



Démonstration. Puisque $I = \text{Bar}((A,a),(B,b),(C,c))$, alors $(a+b+c)\overrightarrow{AI} = b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}$, ainsi $\overrightarrow{AI}$ est colinéaire à $b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}$ et par conséquent à

$$\frac{b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}}{bc} = \frac{\overrightarrow{AB}}{c} + \frac{\overrightarrow{AC}}{b}.$$

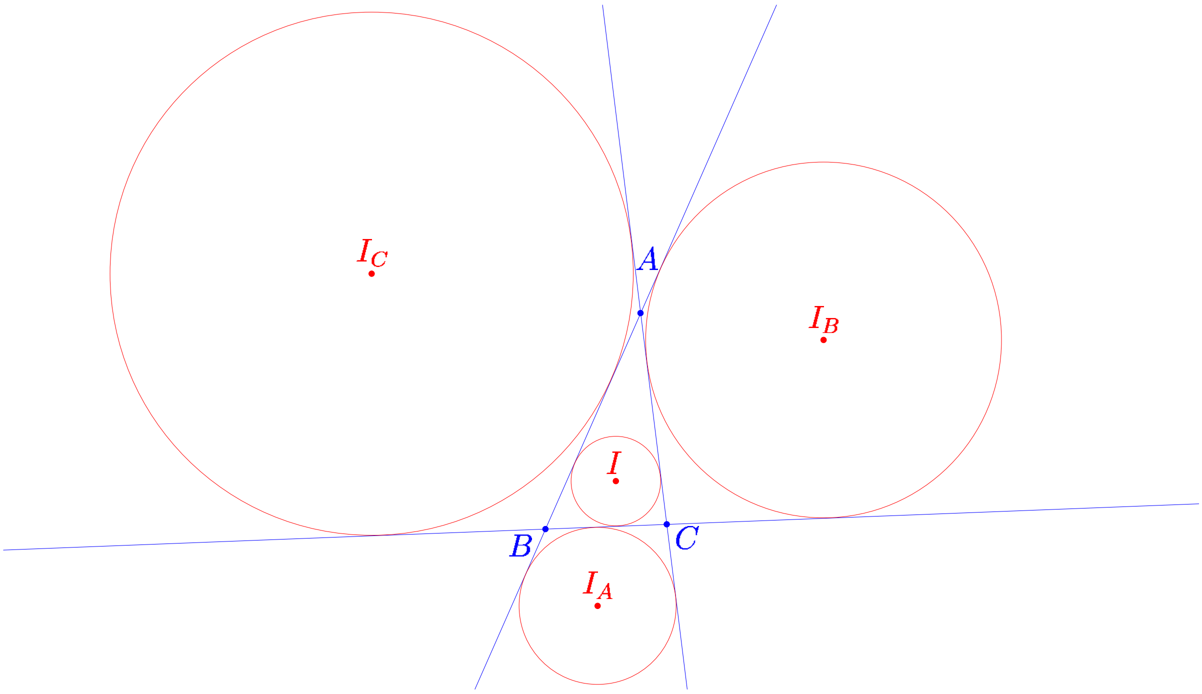
Ce dernier vecteur est la somme de deux vecteurs unitaires colinéaires à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ et dirige donc la bissectrice intérieure en A. Par suite, le point I est sur cette dernière. La même démonstration montrera que I est aussi sur les autres bissectrices intérieures de ABC.

$I_A = \text{Bar}((A,-a),(B,b),(C,c))$, alors $(-a+b+c)\overrightarrow{AI_A} = b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}$ et en procédant comme précédemment on montre que I_A est sur la bissectrice intérieure en A. Ce barycentre I_A vérifie également $(-a+b+c)\overrightarrow{BI_A} = -a\overrightarrow{BA} + c\overrightarrow{BC}$; on en déduit que $\overrightarrow{BI_A}$ est colinéaire à

$$\frac{-a\overrightarrow{BA} + c\overrightarrow{BC}}{ac} = \frac{\overrightarrow{BC}}{a} - \frac{\overrightarrow{BA}}{c},$$

comme ce dernier est la soustraction de deux vecteurs unitaires colinéaires à $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BA}$, il dirige la bissectrice extérieure en B et I_A se trouve donc sur celle-ci. De même la relation $(-a+b+c)\overrightarrow{CI_A} = -a\overrightarrow{CA} + b\overrightarrow{CB}$ implique que I_A est sur la bissectrice extérieure en C, d'où la dernière propriété de l'énoncé. ∎

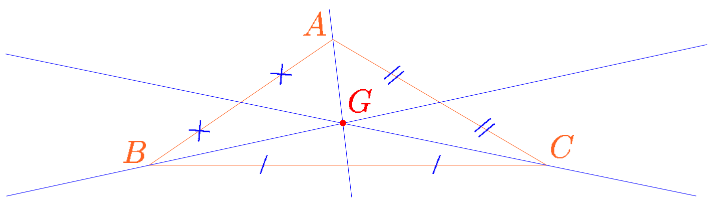
Remarque: I, I_A, I_B et I_C sont les centres de trois cercles tangents aux côtés du triangle, celui de centre I est appelé le cercle inscrit au triangle ABC et les trois autres sont appelés cercles *exinscrits* au triangle.



0.4 Les médianes de ABC.

Définition 0.4.1.
Une médiane d'un triangle est une droite joignant l'un des sommets au milieu du côté opposé.

Théorème 0.4.2.
Les trois médianes d'un triangle ABC sont concourantes en un point G appelé *centre de gravité* du triangle.



Démonstration. Soit $G = \mathrm{Bar}((A, 1), (B, 1), (C, 1))$. Par associativité du barycentre, on a $G = \mathrm{Bar}((A, 1), (A', 2))$ donc $G \in (AA')$. On montre de même que G appartient à (BB') et à (CC'). ■

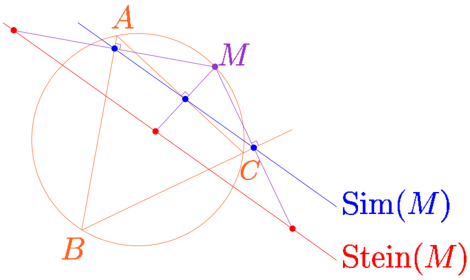
Remarque: Puisque $G = \mathrm{Bar}((A, 1), (A', 2))$, on a $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$ et de même, $\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BB'}$ et $\overrightarrow{CG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CC'}$.

0.5 Les droites de Simson et de Steiner.

Théorème 0.5.1.

Soient ABC un triangle non plat et M un point du plan.

- Les projetés orthogonaux de M sur les côtés du triangle sont alignés si, et seulement si M appartient au cercle $\mathcal{C}_{ABC}$ circonscrit au triangle ABC.
  La droite ainsi obtenue est appelée *droite de Simson* du triangle ABC associé à M et on la note $\mathrm{Sim}(M)$.
- Si on symétrise M par rapport aux côtés de ABC, les trois points ainsi obtenus sont alignés si, et seulement si $M \in \mathcal{C}_{ABC}$.
  La droite ainsi obtenue est appelée *droite de Steiner* de ABC associée à M et est notée $\mathrm{Stein}(M)$.



Démonstration. Si M est un des sommets du traingle, on a clairement l'équivalence puisque $M \in \mathcal{C}_{ABC}$ et deux des projections sont confondues.

Si M est distincts des sommets du triangle, notons P (respectivement Q, R) le projeté orthogonal de M sur (AB) (respectivement (BC), (AC)). Alors P, Q, R sont distincts. en effet, si $P = Q$ alors (PB) et (QB) sont confondues et par conséquent (AB) et (BC) sont confondues ce qui est contraire à l'hypothèse.

On a $\left(\overrightarrow{RP}, \overrightarrow{RQ}\right) = \left(\overrightarrow{RP}, \overrightarrow{RM}\right) + \left(\overrightarrow{RM}, \overrightarrow{RQ}\right) [\pi]$, de plus APM et ARM sont deux triangles rectangle de même hypoténuse donc $APMR$ sont cocycliques et par conséquent, $\left(\overrightarrow{RP}, \overrightarrow{RM}\right) = \left(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AM}\right) [\pi]$. De même, MRC et MQC sont rectangle et de même hypoténuse et on obtient $\left(\overrightarrow{RM}, \overrightarrow{RQ}\right) = \left(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CQ}\right) [\pi]$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
P, Q, R \text{ alignés} \quad &\Leftrightarrow \quad \left(\overrightarrow{RP}, \overrightarrow{RQ}\right) = 0[\pi] \\
&\Leftrightarrow \quad \left(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AM}\right) = \left(\overrightarrow{CQ}, \overrightarrow{CM}\right) [\pi] \\
&\Leftrightarrow \quad \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}\right) = \left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CM}\right) [\pi] \\
P, Q, R \text{ alignés} \quad &\Leftrightarrow \quad M \in \mathcal{C}_{ABC}
\end{aligned}$$

- La droite de Steiner de M est l'image de la droite de Simson de M par l'homothétie de centre M et de rapport 2 (ce qui montre que $\mathrm{Sim}(M)$ est parallèle à $\mathrm{Stein}(M)$). ■

Exercice: Montrer que la droite $\mathrm{Stein}(M)$ passe par H.

Démonstration. Soient P', Q', R' les symétriques de M par rapport à (AB), (BC) et (CA). On suppose ici que $M \in \mathcal{C}_{ABC}$, considérons $\mathcal{C}'_{ABC}$ le symétrique de $\mathcal{C}_{ABC}$ par rapport à (BC). Le cercle $\mathcal{C}'_{ABC}$ contient P' et H car le symétrique de H par rapport à (BC) est sur $\mathcal{C}_{ABC}$. La hauteur (AH) coupe $\mathcal{C}'_{ABC}$ en H et A'. On note S (respectivement T) le second point d'intersection de (MP') avec $\mathcal{C}_{ABC}$ (respectivement $\mathcal{C}'_{ABC}$). Par cocyclicité de S, C, A et

M, on a $\left(\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SM}\right)=\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CM}\right)[\pi]$, comme on vu dans la démonstration précédente, $\left(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PM}\right)=\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CM}\right)[\pi]$, on a $\left(\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SM}\right)=\left(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PM}\right)[\pi]$, ce qui montre que la droite (AS) est parallèle à la droite de Simson (PQ). Soit Δ la droite parallèle à (BC) et passant par le centre de $\mathcal{C}'_{ABC}$. La réflexion d'axe (BC) suivie de la réflexion d'axe Δ transforme (AS) en (HP'), or c'est un produit de réflexions d'axes parallèles; c'est donc une translation et par conséquent (AS) est parallèle à (HP') et par suite à la droite de Simson; (HP') est la parallèle à la droite de Simson passant par P', c'est donc la droite de Steiner. ∎

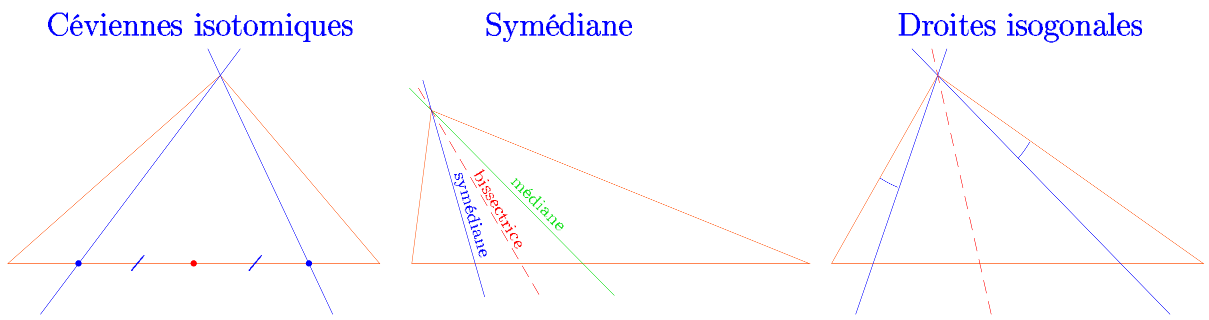
Remarque: La droite $\mathrm{Sim}(M)$ passe par le milieu de $[HM]$ qui est un point du cercle d'Euler.

0.6 Inventaire et propriétés de quelques autres droites remarquables.

Définition 0.6.1.

Donnons quelques droites classiques du triangle:

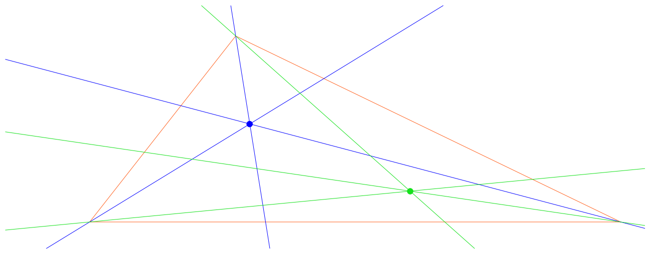
- Une cévienne est une droite passant par un sommet du triangle et sécante avec le côté opposé.
- Des céviennes isotomiques sont deux céviennes issues d'un même sommet A (par exemple) dont leurs pieds sont symétriques par rapport au milieu A' de $[BC]$.
- La symédiane issue d'un sommet A (par exemple) est la droite symétrique de la médiane issue de A par rapport à la bissectrice intérieure issue de A.
  Plus généralement, une droite isogonale d'une cévienne de sommet A est la droite symétrique de cette cévienne par rapport à la bissectrice intérieure issue de A.



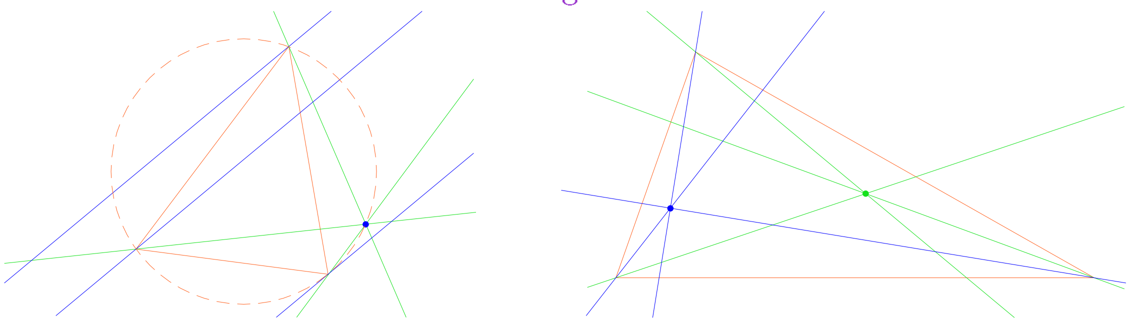
Propriétés 0.6.2.

- Les céviennes isotomiques de trois céviennes concourantes sont elles-mêmes trois céviennes concourantes.
- Les droites isogonales de trois céviennes concourantes en un point P du cercle circonscrit sont parallèles et sont perpendiculaires à $\mathrm{Sim}(P)$.
- Les droites isogonales de trois céviennes concourantes en un point P n'appartenant pas au cercle circonscrit sont concourantes.
  En particulier, les symédianes sont concourantes en un point appelé *point de Lemoine* ou *point symédian*.

Céviennes isotomiques



Droites isogonales

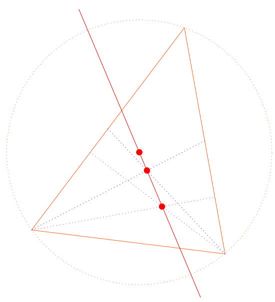


Voici maintenant quelques droites définies par l'alignement de trois points:

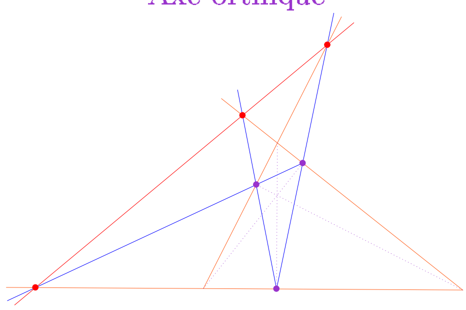
Propriétés 0.6.3.

- Soit O le centre du cercle circonscrit à ABC, G le centre de gravité de ABC et H son orthocentre. Alors, O, G et H sont alignés et, lorsqu'ils ne sont pas confondus, la droite contenant ces points est appelée la *droite d'Euler* du triangle ABC.
- Soient A_1, A_2, A_3 les pieds des hauteurs respectivement issues de A, B et C. Lorsque ABC n'est ni rectangle, ni isocèle, les points $(BC) \cap (B_1C_1)$, $(CA) \cap (C_1A_1)$ et $(AB) \cap (A_1B_1)$ sont alignés et la droite contenant ces points est appelée *l'axe orthique* du triangle ABC.

Droite d'Euler



Axe orthique



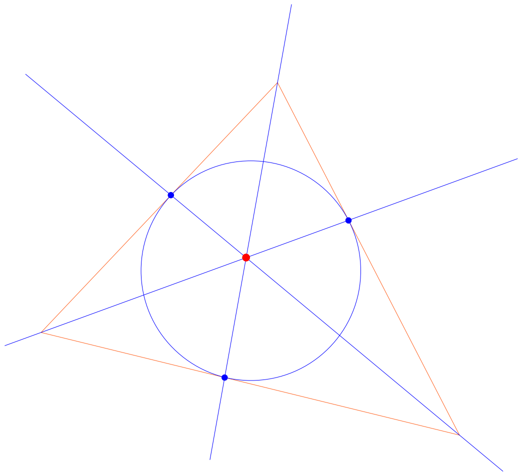
Voici encore deux points définies par la concourance de droites remarquables:

Propriétés 0.6.4.

- Soit $\mathcal{C}$ le cercle inscrit au triangle ABC et D, E, F les points de contact respectifs de $\mathcal{C}$ avec les droites (BC), (CA), (AB). Alors les droites (AD), (BE) et (CF) sont concourantes en un point appelé *point de Gergonne* du triangle ABC.
- En reprenant les notations utilisées dans le paragraphe sur les bissectrices, soit $\mathcal{C}_A$, $\mathcal{C}_B$ et $\mathcal{C}_C$ les cercles exinscrits du triangle ABC, respectivement de centre I_A, I_B et I_C. Soient D_1, E_1 et F_1 les points de contact respectifs de $\mathcal{C}_A$ avec (BC), $\mathcal{C}_B$ avec (CA) et

$\mathcal{C}_C$ avec (AB). Alors les droites (AD_1), (BE_1) et (CF_1) sont concourantes en un point appelé *point de Nagel* du triangle ABC.

Point de Gergonne



Point de Nagel