Définition de e^z pour z élément de $\mathbb{C}$. Propriétés. Etude de la fonction de la variable réelle $t \mapsto e^{it}$ et plus généralement de $t \mapsto e^{at}$, où $a \in \mathbb{C}$. Applications. (Version algèbrique).

Pré-requis:

- ◇ Notion de groupe (en particulier $(\mathbb{R},+)$ et $(\mathbb{U},\cdot)$).
- ◇ Définition d'un homomorphisme de groupe.
- ◇ Définition de e^x pour $x \in \mathbb{R}$ et ses propriétés (équation fonctionnelle, sa dérivée).
- ◇ Définition du cosinus et sinus réels et leurs propriétés.
- ◇ Les nombres complexes (en particulier, le module et la conjugaison).

0.1 L'exponentielle complexe.

Proposition 0.1.1.
Soit l'application

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{U} \\ & t & \longmapsto & \cos t + i \sin t \end{array}$$

où $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} | |z| = 1\}$.
Cette application est un homorphisme surjectif du groupe $(\mathbb{R},+)$ dans le groupe $(\mathbb{U},\cdot)$ dont le noyau est:

$$\mathrm{Ker}\varphi = 2\pi\mathbb{Z}.$$

Démonstration. Montrons que φ est bien définie:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad |\varphi(t)| = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = 1.$$

Montrons que pour tous x, y de $\mathbb{R}$: $\varphi(x+y) = \varphi(x)\varphi(y)$.

$$\begin{aligned} \varphi(x+y) &= \cos(x+y) + i\sin(x+y) \\ &= \cos x \cos y - \sin x \sin y + i(\cos x \sin y + \cos y \sin x) \\ &= \cos x(\cos y + i \sin y) + i \sin x(\cos y + i \sin y) \\ &= (\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y) \\ \varphi(x+y) &= \varphi(x)\varphi(y) \end{aligned}$$

φ est donc un homomorphisme du groupe $(\mathbb{R},+)$ dans le groupe $(\mathbb{U},\cdot)$.

Soit $z = a + ib \in \mathbb{U}$ avec a, b deux réels, alors $a^2 + b^2 = 1$, par conséquent $a \in [-1,1]$. Or la fonction cosinus réelle réalise une bijection de $[0,\pi]$ sur $[-1,1]$, il existe donc $t \in [0,\pi]$ tel que $\cos t = a$. De plus, $b^2 = 1 - a^2 = 1 - \cos^2 t = \sin^2 t$ et donc $z = \cos t + i \sin t$, c'est-à-dire φ surjective.

Cherchons maintenant le noyau de φ: $\mathrm{Ker}\varphi = \{t \in \mathbb{R} | \varphi(t) = 1\}$, or

$$\begin{aligned}
\varphi(t) = 1 &\Leftrightarrow \cos t + i \sin t = 1 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \cos t = 1 \\ \sin t = 0 \end{cases} \\
\varphi(t) = 1 &\Leftrightarrow t = 2k\pi, \quad \text{où } k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Ker}\varphi = 2\pi\mathbb{Z}$ ∎

Conséquences immédiates: Pour tous s, t dans $\mathbb{R}$,

- $\varphi(s+t) = \varphi(s) \cdot \varphi(t)$.
- $\varphi(s)\varphi(-s) = 1$.
- $\varphi(s) \neq 0$.

Vu les propriétés de la fonction φ mises en évidence lors de la démonstration précédente, on peut poser tout naturellement:

$$\varphi(t) := e^{it}.$$

Définition 0.1.2.
Pour tout $z = x + iy \in \mathbb{C}$ (x, y dans $\mathbb{R}$), on définie l'exponentielle complexe par:

$$e^z := e^x \cdot e^{iy}.$$

Notation: Comme pour l'exponentielle réelle, on notera indifféremment l'exponentielle complexe: e^z ou $\exp(z)$.

Propriétés 0.1.3.
L'exponentielle complexe vérifie pour tout $z, w \in \mathbb{C}$:

(i)
$$\exp(z+w) = \exp(z)\exp(w).$$

(ii)
$$\exp(z)\exp(-z) = 1.$$

(iii)
$$\exp(z) \neq 0.$$

(iv)
$$\overline{\exp(z)} = \exp\left(\overline{z}\right).$$

(v)
$$|e^z| = e^{\mathrm{Re}\, z}.$$

Démonstration. Dans tout ce qui suit, on écrit $z = z_1 + iz_2$ et $w = w_1 + iw_2$ où z_1, z_2, w_1 et w_2 sont des réels.

(i) $e^{z+w} = e^{z_1+w_1+i(z_2+w_2)} = e^{z_1+w_1} \cdot e^{i(z_2+w_2)} = e^{z_1}e^{w_1}e^{iz_2}e^{iw_2} = e^{z_1+iz_2}e^{w_1+iw_2} = e^z e^w$.

(ii) D'après (i), $e^z e^{-z} = e^{z-z} = e^0 = 1$.

(iii) $e^z = e^{z_1}e^{iz_2}$, or $e^{z_1} > 0$ et $e^{iz_2} \in \mathbb{U}$ donc $e^z \neq 0$.

(iv)

$$\begin{aligned}
\overline{\exp z} &= \overline{e^{z_1} \cdot e^{iz_2}} = e^{z_1} \cdot (\overline{\cos z_2 + i \sin z_2}) = e^{z_1} \cdot (\cos z_2 - i \sin z_2) \\
&= e^{z_1} \cdot (\cos(-z_2) + i \sin(-z_2)) = e^{z_1} \cdot e^{-iz_2} = e^{z_1 - iz_2} = e^{\overline{z}}
\end{aligned}$$

(v) $|e^z| = |e^{z_1} \cdot e^{iz_2}| = |e^{z_1}| \cdot |e^{iz_2}| = e^{z_1}$.

∎

0.2 Les fonctions $t \mapsto e^{at}$, avec $a \in \mathbb{C}$.

Théorème 0.2.1.
Soit $g : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{at}$, avec $a \in \mathbb{C}$. Alors, pour tout naturel n,

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} g(t) = a^n g(t).$$

Démonstration. Nous allons démontrer par récurrence sur n que pour tout entier naturel n, $\mathrm{D}^n(g) = a^n g$.

$n = 0$: C'est évident.

$n = 1$: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} e^{at} = a e^{at}$.

$n \to n+1$: Supposons que pour un certain rang, $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} g(t) = a^n g(t)$ et montrons que cette relation reste vraie au rang $n+1$:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}t^{n+1}} g(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} g(t)\right) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(a^n g(t)\right) \\
&\qquad \text{(par hypothèse de récurrence)} \\
&= a^n \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} g(t) \\
\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}t^{n+1}} g(t) &= a^{n+1} g(t)
\end{aligned}$$

Donc, pour tout naturel n, $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} g(t) = a^n g(t)$. ■

Propriétés 0.2.2.

(i) Les formules d'Euler: Pour tout réel t,

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}$$

et

$$\sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}.$$

(ii) La formule de De Moivre: Pour tout réel t et tout entier n,

$$(e^{it})^n = e^{int}$$

c'est-à-dire:

$$(\cos t + i \sin t)^n = \cos nt + i \sin nt.$$

Démonstration. Ces formules découlent directement des définitions. ■

0.3 Applications.

Un calcul de somme.

Pour $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}^*$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} \cos(a+kb) &= \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{i(a+kb)}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(e^{ia}\sum_{k=0}^{n-1}(e^{ib})^k\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(e^{ia}\cdot\frac{1-(e^{ib})^n}{1-e^{ib}}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(e^{ia}\cdot\frac{2i\cdot e^{i\frac{n}{2}b}\left(\frac{e^{-i\frac{n}{2}b}-e^{i\frac{n}{2}b}}{2i}\right)}{2i\cdot e^{i\frac{b}{2}}\left(\frac{e^{-i\frac{b}{2}}-e^{i\frac{b}{2}}}{2i}\right)}\right) \\
\sum_{k=0}^{n-1} \cos(a+kb) &= \cos\left(a+\frac{b(n-1)}{2}\right)\cdot\frac{\sin\left(\frac{n}{2}b\right)}{\sin\left(\frac{b}{2}\right)}. \qquad (1)
\end{aligned}$$

De la même manière, on a:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sin(a+kb) = \mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{i(a+kb)}\right) = \sin\left(a+\frac{b(n-1)}{2}\right)\cdot\frac{\sin\left(\frac{n}{2}b\right)}{\sin\left(\frac{b}{2}\right)}.$$

Conséquence: Calcul de $\cos\frac{\pi}{17}$.

Dans (1), on prend $a = b = \pi + \frac{\pi}{2m+1}$;

$$\cos(a+kb) = \cos\left((k+1)\pi + \frac{(k+1)\pi}{2m+1}\right) = (-1)^{k+1}\cos\left(\frac{(k+1)\pi}{2m+1}\right)$$

d'où

$$\sum_{k=0}^{n-1}\cos(a+kb) = \sum_{k=1}^{n}\underbrace{(-1)^k\cos\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right)}_{:=a_k}.$$

De plus,

$$a+\frac{b(n-1)}{2} = \left(\pi+\frac{\pi}{2m+1}\right)\cdot\frac{n-1}{2} = \pi\cdot\frac{(m+1)(n-1)}{2m+1},$$

$$\frac{n}{2}b = \left(\pi+\frac{\pi}{2m+1}\right)\cdot\frac{n}{2} = \pi\cdot\frac{n(m+1)}{2m+1} \quad \text{et} \quad \frac{b}{2} = \pi\cdot\frac{m+1}{2m+1}.$$

Ainsi,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \cos\left(\pi\cdot\frac{(m+1)(n-1)}{2m+1}\right)\cdot\frac{\sin\left(\pi\cdot\frac{n(m+1)}{2m+1}\right)}{\sin\left(\pi\cdot\frac{m+1}{2m+1}\right)}.$$

En prenant $n = 2m+1$, on obtient:

$$\sum_{k=1}^{2m+1} a_k = 0.$$

Puisque $a_k = (-1)^k \cos\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right)$, alors $a_k = a_{2m+1-k}$.

Or

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2m+1} a_k &= \sum_{k=1}^{m} a_k + \sum_{k=m+1}^{2m} a_k + a_{2m+1} \\
&= \sum_{k=1}^{m} a_k + \sum_{k=m+1}^{2m} a_{2m+1-k} + 1 \\
&= \sum_{k=1}^{m} a_k + \sum_{j=1}^{m} a_j + 1 \qquad \text{en posant } j = 2m+1-k \\
&= 2 \cdot \sum_{k=1}^{m} a_k + 1
\end{aligned}$$

Donc

$$\sum_{k=1}^{m} a_k = -\frac{1}{2}.$$

Calculons maintenant $a_{k+j} + a_{k-j}$:

$$\begin{aligned}
a_{k+j} + a_{k-j} &= (-1)^{k+j} \cos\left(\frac{(k+j)\pi}{2m+1}\right) + (-1)^{k-j} \cos\left(\frac{(k-j)\pi}{2m+1}\right) \\
&= (-1)^{k+j}\left(\cos\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right)\cdot\cos\left(\frac{j\pi}{2m+1}\right) - \sin\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right)\cdot\sin\left(\frac{j\pi}{2m+1}\right)\right) \\
&\quad +(-1)^{k+j}\left(\cos\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right)\cdot\cos\left(\frac{j\pi}{2m+1}\right) + \sin\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right)\cdot\sin\left(\frac{j\pi}{2m+1}\right)\right) \\
&= 2(-1)^{k+j}\cos\left(\frac{k\pi}{2m+1}\right)\cdot\cos\left(\frac{j\pi}{2m+1}\right) \\
a_{k+j} + a_{k-j} &= 2a_k a_j.
\end{aligned}$$

Prenons le cas $m = 8$ et posons

$$x_1 := a_1 + a_2 + a_4 + a_8 \qquad \text{et} \qquad x_2 := a_3 + a_5 + a_6 + a_7.$$

Alors, $x_1 + x_2 = -\frac{1}{2}$ et

$$\begin{aligned}
x_1 x_2 &= a_1a_3 + a_1a_5 + a_1a_6 + a_1a_7 + a_2a_3 + a_2a_5 + a_2a_6 + a_2a_7 + a_4a_3 + a_4a_5 + a_4a_6 \\
&\quad + a_4a_7 + a_8a_3 + a_8a_5 + a_8a_6 + a_8a_7 \\
&= \frac{1}{2}\cdot\Big(a_4 + a_2 + a_6 + a_4 + a_7 + a_5 + a_8 + a_6 + a_5 + a_1 + a_7 + a_3 + a_8 + a_4 + \underbrace{a_9}_{=a_8} \\
&\quad + a_5 + a_7 + a_1 + \underbrace{a_9}_{=a_8} + a_1 + \underbrace{a_{10}}_{=a_7} + a_2 + \underbrace{a_{11}}_{=a_6} + a_3 + \underbrace{a_{11}}_{=a_6} + a_5 + \underbrace{a_{13}}_{=a_4} + a_3 + \underbrace{a_{14}}_{=a_3} \\
&\quad + a_2 + \underbrace{a_{15}}_{=a_2} + a_1\Big) \\
&= \frac{1}{2}\left(4\left(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8\right)\right) \\
x_1 x_2 &= -1.
\end{aligned}$$

Donc x_1 et x_2 sont solutions de l'équation $x^2+\frac{1}{2}x-1=0$. $\Delta=\frac{17}{4}$ or $x_1=-\cos\frac{\pi}{17}+\cos\frac{2\pi}{17}+\cos\frac{4\pi}{17}+\cos\frac{8\pi}{17}\geq -1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+0=0$ donc

$$x_1=\frac{\sqrt{17}-1}{4}.$$

On pose maintenant $y_1:=a_1+a_4$ et $y_2:=a_2+a_8$ ainsi $y_1+y_2=x_1$ et

$$\begin{aligned}
y_1y_2 &= a_1a_2+a_1a_8+a_4a_2+a_4a_8\\
&= \frac{1}{2}\cdot(a_3+a_1+\underbrace{a_9}_{=a_8}+a_7+a_6+a_2+\underbrace{a_{12}}_{=a_5}+a_4)\\
y_1y_2 &= -\frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Donc y_1 et y_2 sont solutions de l'équation $y^2-x_1y-\frac{1}{4}=0$.
$\Delta=x_1^2+1$ or $y_1=\cos\frac{4\pi}{17}-\cos\frac{\pi}{17}\leq 0$ et $y_2\geq 0$ donc

$$y_1=\frac{x_1-\sqrt{x_1^2+1}}{2}.$$

Mais,

$$\begin{aligned}
a_4 &= \cos\left(\frac{4\pi}{17}\right)\\
&= 2\cos^2\left(\frac{2\pi}{17}\right)-1\\
&= 2\left(2\cos^2\left(\frac{\pi}{17}\right)-1\right)^2-1\\
&= 2\left(4\cos^4\left(\frac{\pi}{17}\right)-4\cos^2\left(\frac{\pi}{17}\right)+1\right)-1\\
a_4 &= 8a_1^4-8a_1^2+1
\end{aligned}$$

Donc a_1 est solution de $8a^4-8a^2+a+1-y_1=0$ ce qui donne après résolution avec des radicaux:

$$\begin{aligned}
\cos\frac{\pi}{17} &= \frac{1+\sqrt{2}\sqrt{17-\sqrt{17}}-\sqrt{17}}{16}\\
&+\frac{\sqrt{68+12\sqrt{17}+2\sqrt{2}\sqrt{17}\sqrt{17-\sqrt{17}}+6\sqrt{2}\sqrt{17-\sqrt{17}}}}{16}.
\end{aligned}$$