Le cercle. Positions relatives d'une droite et d'un cercle, de deux cercles. Point de vue géométrique et point de vue analytique. Lien entre les deux points de vues.

Pré-requis:
- ◇ La structure d'espace affine du plan (Calcul de vecteurs et relation de Chasles).
- ◇ La notion de distance d'un point à une droite.
- ◇ L'équation d'une droite dans un repère orthonormé.
- ◇ L'inégalité triangulaire (En particulier, la condition nécessaire et suffisante d'existence d'un triangle connaissant les longueurs de ces côtés).
- ◇ Les isométries et leur classification.
- ◇ Le théorème de Pythagore.

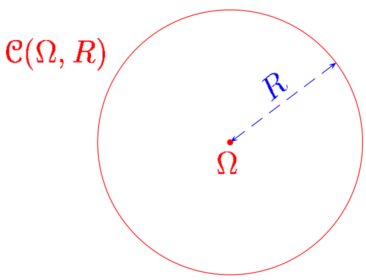
Cadre: On se place dans un plan affine euclidien $\mathcal{P}$ rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$.

0.1 Le cercle.

Définition 0.1.1.
Soit $\Omega \in \mathcal{P}$ et R un réel positif.
On appelle cercle de centre Ω et de rayon R, l'ensemble:

$$\mathcal{C}(\Omega, R) := \{M \in \mathcal{P} | \Omega M = R\}.$$

L'intérieure du cercle (respectivement l'extérieur) est l'ensemble des points M de $\mathcal{P}$ tel que $\Omega M < R$ (respectivement $> R$).



Remarque: Tout cercle est symétrique par rapport à son centre, car une symétrie centrale est une isométrie.

Proposition 0.1.2.
Par trois points non alignés A, B, C, il passe un unique cercle $\mathcal{C}_{ABC}$, appelé cercle circonscrit au triangle ABC, dont le centre est l'intersection des médiatrices de ce triangle.

Démonstration. Si $\mathcal{C}_{ABC}$ existe, son centre est équidistant de A, B et C et se trouve donc sur les trois médiatrices, en leur point de concours Ω; on en déduit l'existence et l'unicité du cercle recherché: c'est le cercle de rayon ΩA centré en Ω. ■

Théorème 0.1.3.

Soit $\mathcal{C}(\Omega, R)$ le cercle de centre $\Omega(a, b)$ et de rayon R.
Une équation cartésienne du cercle s'écrit:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0, \qquad \text{avec } c = a^2 + b^2 - R^2.$$

Inversement, si $(a^2 + b^2 - c)$ est positif, toute équation de ce type détermine un cercle de rayon $\sqrt{a^2 + b^2 - c}$ dont le centre a pour coordonnées (a, b).

Démonstration. Soit $M(x, y)$ un point du cercle $\mathcal{C}(\Omega, R)$.

$$\begin{aligned} M(x,y) \in \mathcal{C}(\Omega, R) &\Leftrightarrow \Omega M^2 - R^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0 \qquad \text{avec } c = a^2 + b^2 - R^2 \end{aligned}$$

■

Remarques:

- Cette équation est l'équation normalisée du cercle (en ce sens que les coefficients de x^2 et y^2 sont égaus à 1) dans le repère orthonormé considéré.
- La proposition précédente se traduit analytiquement par la résolution d'un système de trois équation à trois inconnues linéaires: Soit $A(x_0, y_0)$, $B(x_1, y_1)$ et $C(x_2, y_2)$,

$$A, B, C \in \mathcal{C}(\Omega, R) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x_0 a + 2y_0 b - c = x_0^2 + y_0^2 \\ 2x_1 a + 2y_1 b - c = x_1^2 + y_1^2 \\ 2x_2 a + 2y_2 b - c = x_2^2 + y_2^2 \end{array} \right. .$$

Ce système admet une unique solution si, et seulement si

$$\begin{vmatrix} 2x_0 & 2y_0 & -1 \\ 2x_1 & 2y_1 & -1 \\ 2x_2 & 2y_2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0,$$

c'est-à-dire

$$-4(x_1 y_2 - x_2 y_1) + 4(x_0 y_2 - x_2 y_0) - 4(x_0 y_1 - x_1 y_0) \neq 0,$$

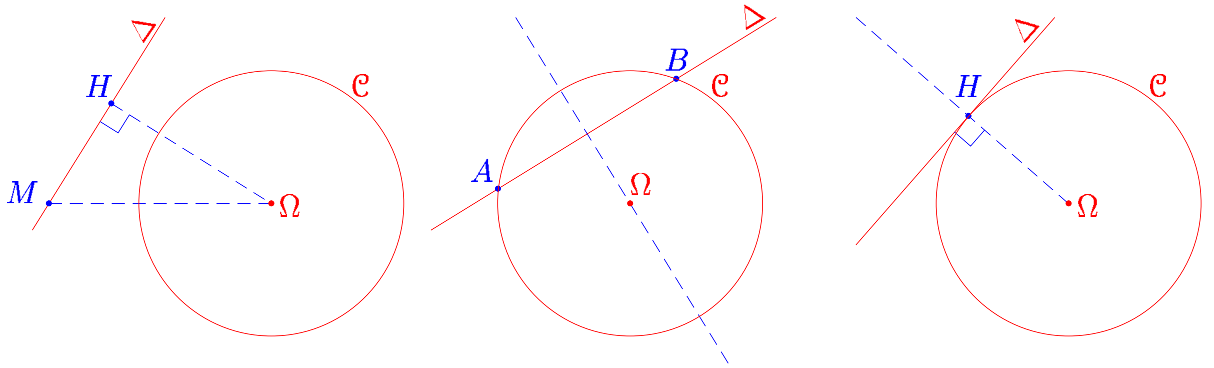
soit encore

$$(x_1 - x_0)(y_2 - y_0) - (x_2 - x_0)(y_1 - y_0) \neq 0.$$

On obtient alors $\overrightarrow{AB} \neq \alpha \overrightarrow{AC}$ ce qui implique que A, B, C sont non alignés.

0.2 Position relative d'une droite et d'un cercle.

Proposition 0.2.1.
Soit une droite Δ et un cercle $\mathcal{C}(\Omega, R)$.
- Si $\mathrm{d}(\Omega, R) > R$, Δ et $\mathcal{C}$ ne se rencontrent pas.
- Si $\mathrm{d}(\Omega, R) < R$, Δ et $\mathcal{C}$ ont exactement deux points communs.
- Si $\mathrm{d}(\Omega, R) = R$, Δ et $\mathcal{C}$ ont un seule point commun.



Démonstration. Soit H le projeté orthogonal de M sur Δ: $\mathrm{d}(\Omega, \Delta) = \Omega H$. Un point $M \in \Delta$ est sur $\mathcal{C}$ si, et seulement si $\Omega M^2 = R^2$. Par le théorème de pythagore, on a:

$$\Omega M^2 = \Omega H^2 + HM^2 = \mathrm{d}(\Omega, \Delta)^2 + HM^2,$$

et M appartient à $\mathcal{C}$ si, et seulement si

$$HM^2 = R^2 - \mathrm{d}(\Omega, \Delta)^2.$$

Il existe zéro, deux ou une solution à cette équation selon que le second membre est strictement négatif, strictement positif ou nul. ■

Vocabulaire: Dans le dernier cas, Δ est dite tangente au cercle en H; elle est orthogonale au rayon du cercle.

Regardons analytiquement l'équation d'une tangente:

Proposition 0.2.2.
L'équation de la tangente au point de coordonnées (x_0, y_0) du cercle d'équation

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$$

est:

$$xx_0 + yy_0 - a(x + x_0) - b(y + y_0) + c = 0.$$

Démonstration. La tangente est la droite passant par (x_0, y_0) et de vecteur normal $\overrightarrow{\Omega M_0}$. Le centre Ω a pour coordonnées (a, b), ainsi le vecteur $\overrightarrow{\Omega M_0}$ a pour composante $(x_0 - a, y_0 - b)$. Sont équation est donc

$$(x - x_0)(x_0 - a) + (y - y_0)(y_0 - b) = 0,$$

c'est-à-dire:

$$xx_0 - ax - x_0^2 + ax_0 + yy_0 - by - y_0^2 + by_0 = 0,$$

donc:

$$xx_0 + yy_0 - a(x + x_0) - b(y + y_0) - x_0^2 - y_0^2 + 2ax_0 + 2by_0 = 0,$$

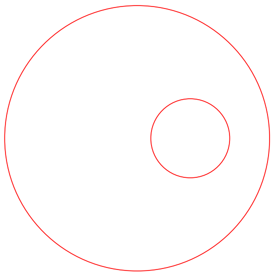
et compte tenu du fait que l'on a $x_0^2 + y_0^2 - 2ax_0 - 2by_0 + c = 0$, on obtient la formule de l'énoncé. ■

0.3 Position relative de deux cercles.

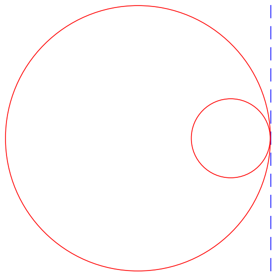
Théorème 0.3.1.

Soient deux cercles $\mathcal{C}(\Omega, R)$ et $\mathcal{C}'(\Omega', R')$, on note $\mathrm{d} = \Omega\Omega'$. Les différents cas sont les suivants:

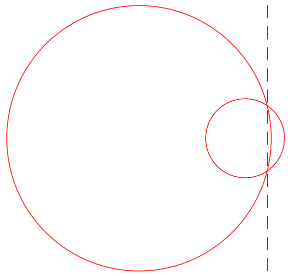
- Si $\mathrm{d} < |R - R'|$: $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ ont une intersection vide et l'un d'eux est intérieur à l'autre.
- Si $\mathrm{d} = |R - R'|$: lorsque $R \neq R'$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ ont un seul point commun en lequel leur tangente est commune, l'un d'eux est intérieur à l'autre: les cercles sont dit tangent intérieurement. Lorsque $R = R'$, ils sont confondus.
- Si $|R - R'| < \mathrm{d} < R + R'$: $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ ont deux points communs distincts.
- Si $\mathrm{d} = R + R'$: $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ ont un seul point commun où ils ont une tangente commune: les cercles sont dits tangent extérieurement.
- Si $\mathrm{d} > R + R'$: $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ ont une intersection vide et chacun est extérieur à l'autre.



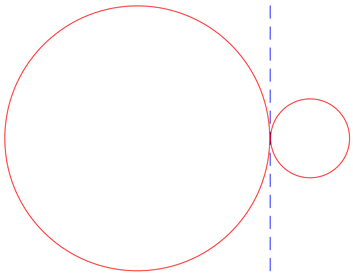
$\mathrm{d} < |R - R'|$



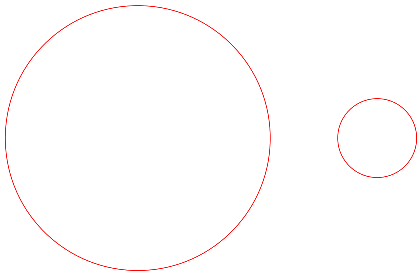
$\mathrm{d} = |R - R'|$



$|R - R'| < \mathrm{d} < R + R'$



$\mathrm{d} = R + R'$



$\mathrm{d} > R + R'$

Démonstration. Donnons une démonstration géométrique pui une démonstration analytique:

- La recherche d'un point M appartenant aux deux cercles est celle de M tel que $\Omega M = R$ et $\Omega' M = R'$, sachant que $\mathrm{d} = \Omega\Omega'$. C'est donc la recherche d'un triangle $\Omega M \Omega'$ dont les côtés ont pour longueurs R, R', d et dont le côté $[\Omega\Omega']$ est donné, alors d'après l'inégalité triangulaire, un tel triangle existe si, et seulement si $|R - R'| \leq \mathrm{d} \leq R + R'$ avec les précisions suivantes: si les inégalités sont strictes, il y a deux tels triangles qui sont symétriques par rapport à $[\Omega\Omega']$, d'où deux points M symétriques par rapport à $[\Omega\Omega']$; en cas d'égalité dans l'une des inégalités, il n'existe qu'un seul triangle et il est plat. Cela démontre ce qui, dans le théorème , concerne les points d'intersection. Les assertions sur la tangente commune lors d'une intersection réduite à un point H du cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire qui nous affirme que Ω, Ω' et H sont alignés. Il reste à vérifier les assertions complémentaires sur la disposition des cercles (intérieur et extérieur). Elles sont toutes de même nature et l'on va traiter seulement le premier cas: $\mathrm{d} < |R - R'|$. Les cercle $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ ont alors une intersection vide et on va vérifier que celui qui a le plus petit rayon (on supposera que c'est $\mathcal{C}'$) est intérieur à l'autre; on a donc $R' \leq R$ et $\mathrm{d} < R - R'$ et, pour tout point M' de $\mathcal{C}'$:

$$\Omega M' \leq \Omega\Omega' + \Omega' M' = \mathrm{d} + R' < R - R' + R' = R;$$

$\Omega M' < R$ signifie que M' est bien intérieur à $\mathcal{C}$.

- On utilise le repère orthonormé $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$ dont l'origine est le centre de $\mathcal{C}$ et dont le vecteur $\overrightarrow{\imath}$ est colinéaire à $\overrightarrow{\Omega\Omega'}$, de sorte que les équations respectives de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont $x^2 + y^2 = R^2$ et $(x - d)^2 + y^2 = r^2$. $M(x, y)$ appartient aux deux cercles si, et seulement si ses coordonnées vérifient le système formé par ces deux équations. Lorsqu'on lui soustrait la première équation, la seconde devient $-2dx + d^2 = R'^2 - R^2$, d'où $x = \frac{R^2 - R'^2 + \mathrm{d}^2}{2\mathrm{d}}$. Pour obtenir l'ordonnée y des éventuels points communs, on reporte cette valeur de x dans $x^2 + y^2 = R^2$ et on tire

$$y^2 = R^2 - \left(\frac{R^2 - R'^2 + \mathrm{d}^2}{2\mathrm{d}}\right)^2$$

qu'on multiplie par $4\mathrm{d}^2$:

$$4\mathrm{d}^2 y^2 = 4d^2 R^2 - \left(R^2 - R'^2 + \mathrm{d}^2\right)^2.$$

On factorise alors le second membre en remarquant qu'apparaisent plusieurs fois des différences de carrés:

$$4\mathrm{d}^2 y^2 = 4\mathrm{d}^2 R^2 - \left(R^2 - R'^2 + \mathrm{d}^2\right)^2 = \left(2\mathrm{d}R - \left(R^2 - R'^2 + \mathrm{d}^2\right)\right) \cdot \left(2\mathrm{d}R + \left(R^2 - R'^2 + \mathrm{d}^2\right)\right),$$

soit en simplifiant,

$$\begin{aligned} 4\mathrm{d}^2 y^2 &= \left(R'^2 - (R - \mathrm{d})^2\right) \cdot \left((R + \mathrm{d})^2 - R'^2\right) \\ &= (R' - R + \mathrm{d})(R' + R - \mathrm{d})(R + \mathrm{d} - R')(R + \mathrm{d} + R') \end{aligned}$$

Il y a zéro, une, ou deux solutions opposées en y selon que le second membre est strictement négatif, nul, ou strictement positif. Le terme $R + R' + \mathrm{d}$ est positif, et on peut supposer, par exemple, que R est supérieur à R'. Le signe est alors celui de $(R' - R + \mathrm{d})(R' + R - \mathrm{d})$: compte tenu de $|R - R'| = R - R'$, cette quantité est strictement négative pour $\mathrm{d} < |R - R'|$ ou $\mathrm{d} > R + R'$, nulle pour $\mathrm{d} = |R - R'|$ et $\mathrm{d} = R + R'$, strictement positive pour $|R - R'| < \mathrm{d} < R + R'$. Cela établit les affirmations du théorème relatives au nombre de points d'intersection.
Le vérification des autres affirmations, précisant la position relative se fait comme à la fin de la précédente démonstration.

■