Théorème de l'angle inscrit: ensemble des points M du plan tels que l'angle orienté de droites ou de demi-droites $\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right)$ soit constant. Cocyclicité. Application.

Pré-requis:

◇ Notion d'angle orienté de vecteurs (En particulier, la relation de Chasles.)

◇ Propriétés angulaires d'un triangle ABC:

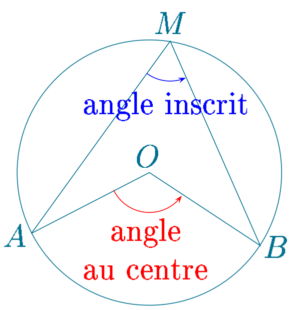
$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) + \left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right) + \left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right) \equiv \pi[2\pi].$$

◇ Définition de droite, demi-droite et cercle .

Cadre: On se place dans un plan affine euclidien orienté $\mathcal{P}$.

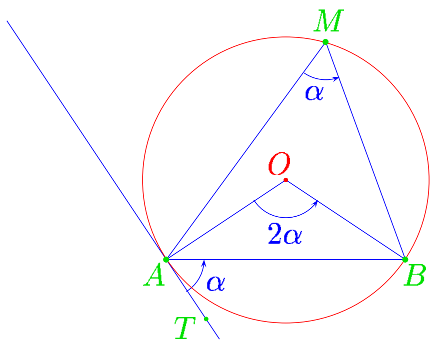
0.1 Théorème de l'angle inscrit.

Définition 0.1.1.
Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et M, A, B trois points distincts de $\mathcal{C}$. Les angles orientés de vecteurs $\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right)$ et $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$ sont appelés respectivement angle inscrit et angle au centre.



Théorème 0.1.2.
Théorème de l'angle inscrit
Soient M, A, B trois points distincts d'un cercle de centre O et T un point de la tangente en A ($T \neq A$). Alors,

$$\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) \equiv 2\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) \equiv 2\left(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}\right) [2\pi].$$



Démonstration. La somme des angles orientés du triangle MAO est égale à π:

$$\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MO}\right)+\left(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AM}\right)+\left(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OA}\right)\equiv\pi[2\pi].$$

Or le triangle MAOest isocèle, donc $\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MO}\right)\equiv\left(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AM}\right)[2\pi]$, d'où

$$2\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MO}\right)+\left(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OA}\right)\equiv\pi[2\pi].$$

Les même considérations dans le triangle isocèle MOB mène à l'égalité analogue:

$$2\left(\overrightarrow{MO},\overrightarrow{MB}\right)+\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OM}\right)\equiv\pi[2\pi].$$

En ajoutant les deux égalités, on obtient:

$$2\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MO}\right)+2\left(\overrightarrow{MO},\overrightarrow{MB}\right)+\left(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OA}\right)+\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OM}\right)\equiv0[2\pi]$$

d'où, par la relation de Chasles;

$$2\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)+\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}\right)\equiv0[2\pi].$$

En utilisant la relation de Chasles et le fait que la tangente est orthogonale à (OA), on a:

$$2\left(\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AB}\right)\equiv2\left(\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AO}\right)+2\left(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AB}\right)\equiv\pi+2\left(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AB}\right)[2\pi].$$

Or la somme des angles orientés du triangle isocèle AOB étant égale à π, on a:

$$2\left(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AB}\right)\equiv\pi-\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OA}\right)[2\pi]$$

d'où,

$$2\left(\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AB}\right)\equiv\pi+\pi-\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}\right)\equiv\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)[2\pi].$$

■

Corollaire 0.1.3.
Soient M, A, B trois points distincts d'un cercle de centre O et T un point de la tangente en A $(T\neq A)$. Alors,

$$\left(\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AB}\right)\equiv\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)[\pi]$$

c'est-à-dire l'égalité des angles orientés de droites.

Démonstration. Du théorème de l'angle inscrit, il résulte:

$$2\left[\left(\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AB}\right)-\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)\right]\equiv 0[2\pi]$$

et 0 et π modulo 2π sont les seuls angles orientés de vecteurs dont le double soit nul, $\left[\left(\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AB}\right)-\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)\right]$ est égal à 0 ou π modulo 2π, d'où

$$\left(\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AB}\right)\equiv\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)[\pi].$$

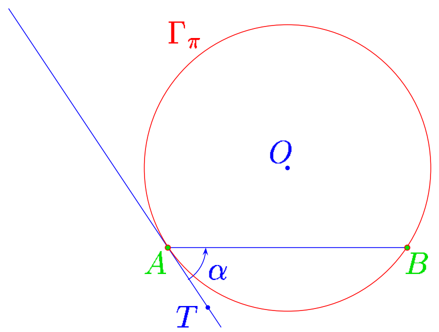
∎

0.2 Lignes de niveau de $M\in\mathcal{P}\mapsto\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)[\pi]$ et $[2\pi]$.

Théorème 0.2.1.
Théorème du cercle capable.
Soient A et B deux points distincts de $\mathcal{P}$, α un réel, et

$$\Gamma_\pi=\left\{M\in\mathcal{P}\,\middle|\,\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)=\alpha[\pi]\right\}.$$

- Si $\alpha\equiv 0[\pi]$, alors $\Gamma_\pi=(AB)$.
- Si $\alpha\not\equiv 0[\pi]$, Γ_π est le cercle passant par A et B et admettant pour tangente en A la droite (AT) définie par $\left(\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AB}\right)=\alpha[\pi]$, privé des points A et B.



Démonstration. La première assertion est évidente.

Soit O l'intersection de la médiatrice de $[AB]$ et de la perpendiculaire à (AT) en A, on notera $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon (OA).

Si $M\in\mathcal{C}\setminus\{A,B\}$, le théorème de l'angle inscrit donne:

$$\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)\equiv 2\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)=2\left(\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AB}\right)[2\pi]$$

et on a comme dans la démonstration précédente

$$\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)\equiv\alpha[\pi],$$

d'où $M\in\Gamma_\pi$.

Réciproquement, si $M \in \Gamma_\pi$, les points M, A, B ne sont pas alignés et l'on peut définir le cercle $\mathcal{C}'$ circonscrit au triangle MAB. Si O' désigne le centre de $\mathcal{C}'$ et (AT') la tangente à $\mathcal{C}'$ en A, alors le théorème de l'angle inscrit montre que

$$\left(\overrightarrow{O'A}, \overrightarrow{O'B}\right) \equiv 2\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) \equiv 2\left(\overrightarrow{AT'}, \overrightarrow{AB}\right)[2\pi]$$

soit encore

$$\left(\overrightarrow{AT'}, \overrightarrow{AB}\right) \equiv \alpha[\pi],$$

ainsi

$$\left(\overrightarrow{AT'}, \overrightarrow{AB}\right) \equiv \left(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}\right)[\pi]$$

d'où $(AT) = (AT')$. Les cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ passent par les points A et B et admettent la même tangente en A. Ils sont donc égaux et $M \in \mathcal{C} \setminus \{A, B\}$. ■

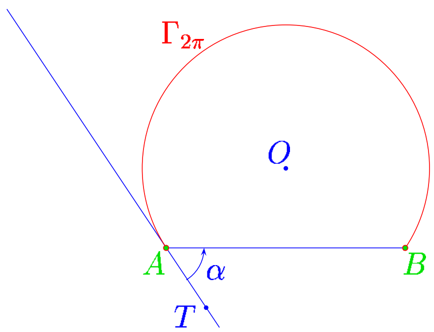
Théorème 0.2.2.

Théorème de l'arc capable.

Soient A et B deux points distincts de $\mathcal{P}$, α un réel, et

$$\Gamma_{2\pi} = \left\{M \in \mathcal{P} \,\middle|\, \left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) = \alpha[2\pi]\right\}.$$

- Si $\alpha \equiv 0[2\pi]$, alors $\Gamma_{2\pi} = (AB)\backslash]AB[$.
- Si $\alpha \equiv \pi[2\pi]$, alors $\Gamma_{2\pi} =]AB[$,
- Si $\alpha \not\equiv 0[2\pi]$, $\Gamma_{2\pi}$ est un arc de cercle passant par A et B. Plus précisément, si T est un point distinct de A tel que $\left(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}\right) \equiv \alpha[2\pi]$, l'ensemble Γ_{2_pi} est l'intersection du cercle $\mathcal{C}$ passant par A et B et admettant (AT) pour tangente en A et du demi-plan ouvert de frontière (AB) ne contenant pas T.



Démonstration. Seule la dernière assertion n'est pas évidente. Soit $\alpha \not\equiv 0[\pi]$.

$$\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) \equiv \alpha[2\pi] \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) \equiv \alpha[\pi] \\ \sin\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) \cdot \sin\alpha > 0. \end{cases}$$

La condition $\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) \equiv \alpha[\pi]$ équivaut à l'appartenance de M au cercle $\mathcal{C}$ (théorème du cercle capable). Il suffit donc de vérifier que la deuxième condition équivaut à l'appartenance de M au demi-plan ouvert dont parle l'énoncé.

On choisit un repère orthonormé direct $(A, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ tel que $\overrightarrow{AB} = \lambda\vec{\imath}$ avec $\lambda = AB$. Comme le déterminant $\left|\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right|$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est $MA \cdot MB \cdot \sin\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right)$, son signe est celui du sinus. En notant $M(x,y)$, $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ ont pour composante respectives $(-x,-y)$ et $(\lambda-x,-y)$ d'où l'on déduit $\left|\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right| = \lambda y$, or λ est positif, donc $\sin\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)$ est du même signe que y. Par conséquent, $\sin\left(\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}\right)\cdot\sin\alpha > 0$ équivaut à l'appartenance de M au demi-plan P_1 délimité par (AB) dans lequel $y\cdot\sin\alpha > 0$. Pour tout point T de la tangente en A ($T \neq A$), alors d'après le théorème de l'angle inscrit, on a $\left(\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AB}\right) \equiv \alpha[\pi]$; par conséquent, $\left(\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AB}\right) \equiv \alpha[2\pi]$ si, et seulement si on a de plus $\sin\left(\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AB}\right)\sin\alpha > 0$, ou encore $\left|\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AB}\right|\cdot\sin\alpha > 0$. En posant $T(x,y)$, les composantes respectives de $\overrightarrow{AT}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont (x,y) et $(\lambda,0)$ et on a: $\left|\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AB}\right| = -\lambda y$. On a donc $\sin\left(\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AB}\right)\sin\alpha > 0$ si, et seulement si T est dans le demi-plan ouvert P_2 où $y\cdot\sin\alpha < 0$, c'est-à-dire dans le demi-plan opposé à celui de M. ■

0.3 Condition angulaire de cocyclicité.

Théorème 0.3.1.
Soient A, B, C et D quatre points distincts du plan euclidien.
Les points A, B, C, D sont cocycliques ou alignés si, et seulement si on a:

$$\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right) = \left(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}\right)[\pi].$$

Démonstration. Si A, B, C et D sont alignés, on a $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right) = \left(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}\right) = 0[\pi]$. Si A, B, C, D sont cocycliques, le théorème de l'angle inscrit implique

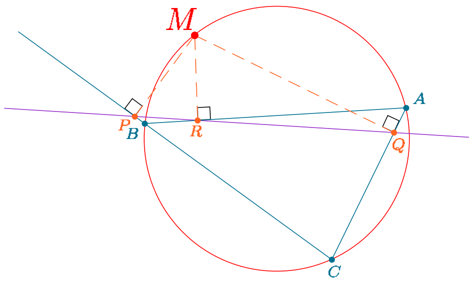
$$2\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right) = 2\left(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}\right) = \left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)[2\pi],$$

d'où $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right) = \left(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}\right)[\pi]$.

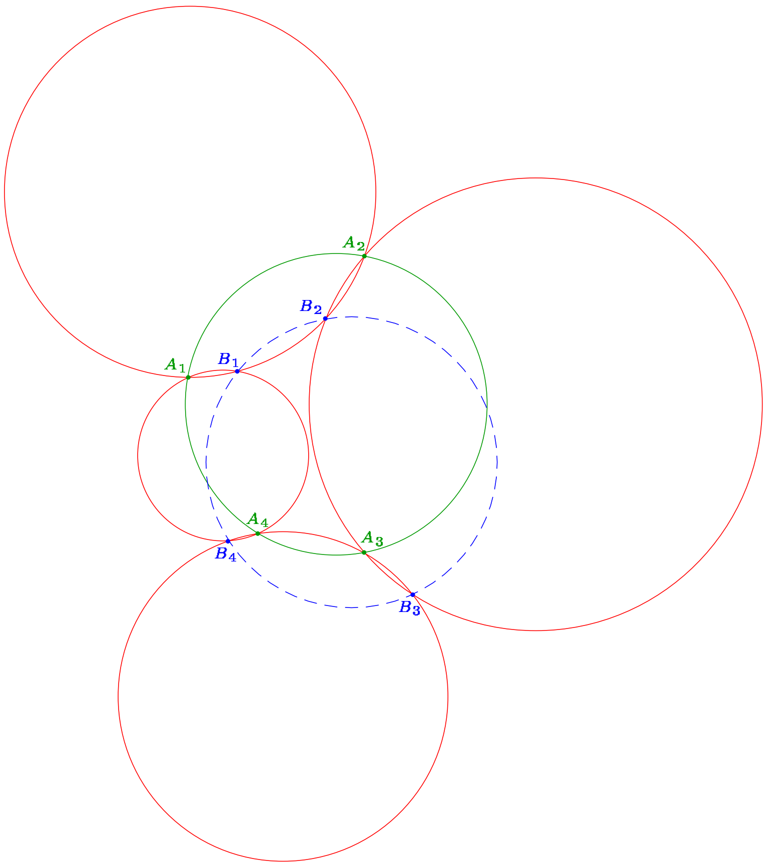
Inversement, on suppose que $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right) = \left(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}\right)[\pi]$. Alors A, B, C sont alignés si, et seulement si A, B, D sont alignés car cela correspond à la nullité de ces deux angles modulo π et à l'alignement des quatres points. Si A, B, C sont non alignés, alors A, B, D ne le sont pas et il existe deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ circonscrits respectivement à ABC et ABD. Si T (respectivement T') est un point de la tangente en A à $\mathcal{C}$ (respectivement à $\mathcal{C}'$) différent de A, on a, par le théorème de l'angle inscrit, $\left(\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AB}\right) = \left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)[\pi]$ (respectivement $\left(\overrightarrow{AT'},\overrightarrow{AB}\right) = \left(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}\right)[\pi]$) d'où $\left(\overrightarrow{AT},\overrightarrow{AB}\right) = \left(\overrightarrow{AT'},\overrightarrow{AB}\right)[\pi]$ et $(AT) = (AT')$. Les cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ passent tous les deux par A et B et ont la même tangente en A: ils sont donc confondus et les quatres points A, B, C, D sont cocycliques. ■

0.4 Applications.

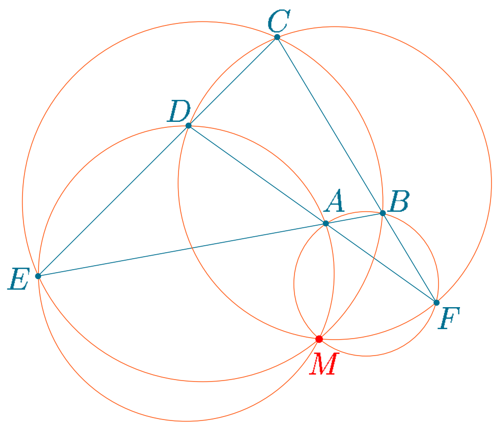
(i) *La droite de Simson* Soit ABC un triangle non plat et M un point du plan. Les trois projetés orthogonaux de M sur les droites (AB), (BC), (CA) sont alignés sur une droite, appelée droite de Simson de M, si, et seulement si M est sur le cercle circonscrit à ABC.



(ii) *Théorème des six cercles de Miquel.* Soient $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$, $\mathcal{C}_4$ quatre cercles du plan, on appelle A_1, B_1 les points d'intersection de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, A_2, B_2 les points d'intersection de $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$, A_3, B_3 les points d'intersection de $\mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_4$, A_4, B_4 les points d'intersection de $\mathcal{C}_4$ et $\mathcal{C}_1$. Si A_1, A_2, A_3, A_4 sont cocycliques, alors B_1, B_2, B_3, B_4 le sont aussi.



(iii) *Le point de Miquel* Soit $ABCDEF$ un quadrilatère complet, c'est-à-dire $ABCD$ est convexe, E est l'intersection de (AB) et (CD), F est l'intersection de (BC) et (AD). Les quatres cercles circonscrits aux triangles ADE, ABF, BCE CDF ont un point commun M, appelé point de Miquel du quadrilatère complet.



Démonstration. (i) On écarte le cas trivial où M est en A, B, C. Soit P, Q, R les projetés orthogonaux de M sur les trois droites.

Comme PCM et QCM sont des triangles rectangles qui ont la même hypoténuse, C, P, Q et M sont cocycliques, et l'on a:

$$\left(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PM}\right)\equiv\left(\overrightarrow{CQ},\overrightarrow{CM}\right)\equiv\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CM}\right)[\pi].$$

Les triangles rectangles RBM et PBM ont également la même hypothénuse, B, P, M, R sont alors cocycliques et on a:

$$\left(\overrightarrow{PM},\overrightarrow{PR}\right)\equiv\left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BR}\right)\equiv\left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BA}\right)[\pi].$$

Puisque $\left(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR}\right)\equiv\left(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PM}\right)+\left(\overrightarrow{PM},\overrightarrow{PR}\right)[2\pi]$, on a:

$$\left(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR}\right)\equiv\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CM}\right)+\left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BA}\right)[\pi].$$

L'alignement de P, Q, R est équivalent à $\left(\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR}\right)\equiv 0[\pi]$; c'est donc équivalent à $\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BM}\right)\equiv\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CM}\right)[\pi]$, ce qui est la condition de cocyclicité de M avec ABC, c'est-à-dire l'appartenance de M au cercle circonscrit $\mathcal{C}$.

(ii) Supposons que A_1, A_2, A_3, A_4 sont cocycliques.

$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{B_1B_4},\overrightarrow{B_1B_2}\right) &\equiv \left(\overrightarrow{B_1B_4},\overrightarrow{B_1A_1}\right)+\left(\overrightarrow{B_1A_1},\overrightarrow{B_1B_2}\right)[\pi] \quad \text{(relation de Chasles)}\\ &\equiv \left(\overrightarrow{A_4A_1},\overrightarrow{A_4B_4}\right)+\left(\overrightarrow{A_2A_1},\overrightarrow{A_2B_2}\right)[\pi] \quad \text{(par cocyclicité)}\end{aligned}$$

de même,

$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{B_3B_2},\overrightarrow{B_3B_4}\right) &\equiv \left(\overrightarrow{B_3B_2},\overrightarrow{B_3A_3}\right)+\left(\overrightarrow{B_3A_3},\overrightarrow{B_3B_4}\right)[\pi]\\ &\equiv \left(\overrightarrow{A_2A_3},\overrightarrow{A_2B_2}\right)+\left(\overrightarrow{A_4A_3},\overrightarrow{A_4B_4}\right)[\pi]\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{B_1B_4},\overrightarrow{B_1B_2}\right)-\left(\overrightarrow{B_3B_2},\overrightarrow{B_3B_4}\right) &\equiv \left(\overrightarrow{A_4A_1},\overrightarrow{A_4B_4}\right)-\left(\overrightarrow{A_4A_3},\overrightarrow{A_4B_4}\right)\\ &\quad+\left(\overrightarrow{A_2A_1},\overrightarrow{A_2B_2}\right)-\left(\overrightarrow{A_2A_3},\overrightarrow{A_2B_2}\right)[\pi]\\ &\equiv \left(\overrightarrow{A_4A_1},\overrightarrow{A_4A_3}\right)+\left(\overrightarrow{A_2A_1},\overrightarrow{A_2A_3}\right)[\pi]\\ &\equiv 0[\pi] \qquad \text{(car } A_1,\ A_2,\ A_3 \text{ et } A_4 \text{ sont cocycliques)}\end{aligned}$$

Donc B_1, B_2, B_3 et B_4 sont cocycliques.

(iii) Avec des notations évidentes, soit M le second point d'intersection des cercles $\mathcal{C}_{ADE}$ et $\mathcal{C}_{ABF}$. Par cocyclicité,

$$\left(\overrightarrow{ME}, \overrightarrow{MA}\right) \equiv \left(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DA}\right) \equiv \left(\overrightarrow{CE}, \overrightarrow{DF}\right) [\pi]$$

et

$$\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) \equiv \left(\overrightarrow{FA}, \overrightarrow{FB}\right) \equiv \left(\overrightarrow{DF}, \overrightarrow{CB}\right) [\pi].$$

On a alors:

$$\left(\overrightarrow{ME}, \overrightarrow{MB}\right) \equiv \left(\overrightarrow{ME}, \overrightarrow{MA}\right) + \left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) \equiv \left(\overrightarrow{CE}, \overrightarrow{DF}\right) + \left(\overrightarrow{DF}, \overrightarrow{CB}\right) [\pi]$$

c'est-à-dire:

$$\left(\overrightarrow{ME}, \overrightarrow{MB}\right) \equiv \left(\overrightarrow{CE}, \overrightarrow{CB}\right) [\pi],$$

ainsi B, C, E et M sont cocycliques.

De la même manière, on a:

$$\left(\overrightarrow{MD}, \overrightarrow{MA}\right) \equiv \left(\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EA}\right) \equiv \left(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{AB}\right) [\pi]$$

et

$$\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MF}\right) \equiv \left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BF}\right) \equiv \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{FC}\right) [\pi],$$

ainsi

$$\left(\overrightarrow{MD}, \overrightarrow{MF}\right) \equiv \left(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CF}\right) [\pi]$$

c'est-à-dire C, D, F, M cocycliques.

■